# *Keine Ahnung vom Vektorenvergleich*

Wie setzt man die

Supermethode

*Vektorenvergleich?*

ein?

Kaum ein Schüler verwendet sie….

Ob das die Lehrer kennen…..????

Stand 22. November 2020

**Datei Nr. 63020**

**Friedrich W. Buckel**

Internetbibliothek für Schulmathematik

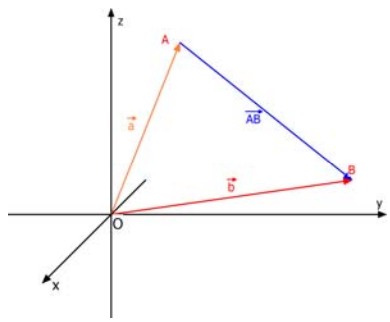
www.mathe-cd.de

## Bitte lesen!

Die Vektorrechnung ist eine Art Algebra (sie heißt auch lineare Algebra), die man hervorragend auf geometrische Probleme anwenden kann. Man kann die Algebra als die Lehre vom Rechnen mit bestimmten Objekten deuten. Sie sagt uns, mit welchen Regeln/Gesetzen man rechnen kann.

Da man z. B. Punkte nicht addieren kann, wurden Vektoren eingeführt. Damit meint man aber nicht einzelne Pfeile, sondern Pfeilklassen. Das bedeutet, dass jeder Vektor eine Menge aus unendlich vielen Pfeilen besteht, deren Lage beliebig ist (man verwendet die Pfeile dort wo man sie benötigt), die aber für einen Vektor alle gleich lang sind und dieselbe Richtung haben. Die Länge der Pfeile nennt man den Betrag des Vektors, zu dem sie gehören.

Damit man die Vektorrechnung auf Punkte anwenden kann, hat man **Ortsvektoren** eingeführt. Dieser historisch bedingte Begriff ist irreführend, denn ein Ortsvektor ist keine Vektor sondern ein einzelner Pfeil, und zwar genau der Pfeil, der im Ursprung beginnt und dann irgendwo seinen Endpunkt A hat. Man schreibt dann $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$.




Damit gelingt es, auch beliebige Vektoren (Pfeile) zu berechnen.

Man lernt zuerst die Addition: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$.

Stellt man diese Gleichung um: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

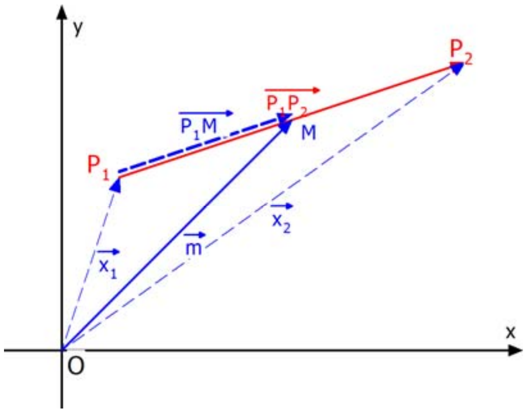
In der Schreibweise mit den Ortsvektoren heißt diese

Grundregel: $\boxed{\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}}$

Diese benötigt man ganz oft bei der Vektorvergleichsmethode.
Und damit beginnen wir, diese anzuwenden:

## Inhalt:

# 1. Mittelpunkt einer Strecke




Gegeben seien zwei Punkte $P_1$ und $P_2$.
Gesucht ist der Mittelpunkt der Strecke $P_1P_2$.

Ich zeige nun zwei verschiedene Berechnungsmethoden für diese Mittelpunkt M.

### 1. Herleitung über eine Vektorsumme.

Zur Berechnung von M bzw. $\vec{m}$ addiert man die Vektoren $\overrightarrow{OP_1}$ und $\overrightarrow{P_1M}$. Da M der Mittelpunkt von $P_1$ $P_2$ sein soll, ist $\overrightarrow{P_1M}$ halb so lang wie $\overrightarrow{P_1P_2}$. Also gilt:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_1} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_2} \qquad (1)$$

Nun muss man wissen, dass gilt: $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$.

Damit folgt aus (1): $\vec{m} = \vec{x}_1 + \tfrac{1}{2}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$:

Ausmultiplizieren und zusammenfassen ergibt: $\vec{m} = \vec{x}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{x}_2 - \tfrac{1}{2}\vec{x}_1$:

Und daraus wird: $\boxed{\vec{m} = \tfrac{1}{2}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)}$

### 2. Herleitung durch die Methode „Vektorenvergleich“

Da M der Mittelpunkt von $P_1$ $P_2$ sein soll, ist $\overrightarrow{P_1M} = \tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}$

Verwendet man die Ortsvektoren, heißt dies: $\vec{m} - \vec{x}_1 = \tfrac{1}{2}(\vec{x}_2 - \vec{x}_1)$

Daraus folgt: $\vec{m} = \vec{x}_1 + \tfrac{1}{2}\vec{x}_2 - \tfrac{1}{2}\vec{x}_1$ und schließlich $\boxed{\vec{m} = \tfrac{1}{2}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)}$

**HINWEIS:**

Bei dieser Methode vergleicht man den Vektor $\overrightarrow{P_1M}$ mit dem Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ und schreibt auf: $\overrightarrow{P_1M} = \tfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}$. Schreibt man $\overrightarrow{P_1M}$ als $\vec{m} - \vec{x}_1$, kann man die Gleichung nach $\vec{m}$ umstellen und erhält eine Formel für $\vec{m}$. Dies geht schneller als die Berechnung von $\vec{m}$ durch eine Vektoraddition.

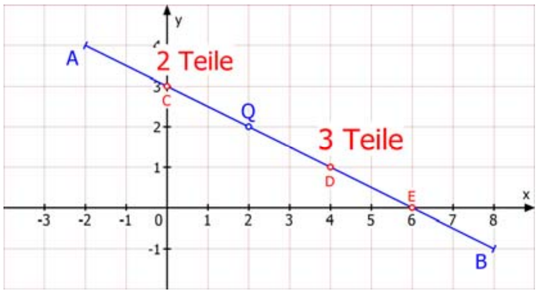
Soll man einen Mittelpunkt berechnen, kann man entweder gleich die Formel $\boxed{\vec{m} = \tfrac{1}{2}(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)}$ verwenden – wenn man sie weiß, oder man leitet sie z. B. durch den Vektorenvergleich her und setzt dann ein.

**Beispiel:** Mittelpunkt von $A(2|1|-3)$, $B(5|-3|2)$:

$$m_{AB} = \tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}\right] = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}7\\-2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{7}{2}\\-1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix} \Rightarrow M_{AB}\left(\tfrac{7}{2}|-1|-\tfrac{1}{2}\right)$$

Anmerkung: Mehr dazu im Text 63060

## 2. Teilpunkt einer Strecke



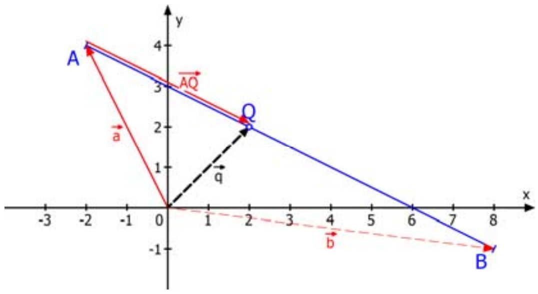

Gegeben seien zwei Punkte A und B.
Gesucht ist der Punkt Q, der AB im Verhältnis 2:3 teilt.

Ich zeige zwei verschiedene Berechnungsmethoden für diesen Teilpunkt Q-

### 1. Herleitung über eine Vektorsumme.

Zur Berechnung von Q bzw. $\vec{q}$ addiert man die Vektoren $\overrightarrow{OA}$ und AQ .

Auf Grund des Teilverhältnisses 2:3 wird ABN in 5 Teile „zerlegt", und es gilt: $\boxed{\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB}}$




Also folgt: $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ (1)

Wegen $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ folgt aus (1):

$$\vec{t} = \vec{a} + \frac{2}{5}\left(\vec{b} - \vec{a}\right):$$

Ausmultiplizieren und zusammenfassen ergibt:

$$\vec{t} = \vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a}$$

Und daraus wird: $\boxed{\vec{t} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}}$

### 2. Herleitung durch die Methode „Vektorenvergleich"

Da T die Strecke AB im Verhältnis 2:3 teilt: $\boxed{\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB}}$

Verwendet man die Ortsvektoren, heißt dies: $\vec{t} - \vec{a} = \frac{2}{5}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$

Daraus folgt: $\vec{t} = \vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a}$ und schließlich $\boxed{\vec{t} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}}$

Solche Teilpunkt-Berechnungen wird man in der Regel so herleiten, denn die Formel

$\boxed{\vec{t} = \frac{y}{x+y} \cdot \vec{x}_1 + \frac{x}{x+y} \cdot \vec{x}_2}$ wird sich kaum jemand merken. Und ich empfehle immer die

Vektoren-Vergleichsmethode: Man vergleicht die Vektoren $\overrightarrow{AT}$ und $\overrightarrow{AB}$ und findet $\boxed{\overrightarrow{AT} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB}}$,

aus der die Berechnungsformel für $\vec{t}$ folgt.

**Beispiel:** Q soll AB im Verhältnis 2:3 teilen mit $A(3\,|\,-2\,|\,1)$, $B(-2\,|\,3\,|\,-9)$.

**Lösung:** Ansatz: $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB}$ (Vektorenvergleich)

Mit Ortsvektoren: $\vec{q} - \vec{a} = \frac{2}{5}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \Leftrightarrow \vec{q} = \vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} - \frac{2}{5}\vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{q} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}}$

Mit Zahlen: $\vec{q} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 9-4 \\ -6+6 \\ 3-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{Q(1\,|\,0\,|\,-3)}$

Anmerkung: Mehr dazu im Text 63060

## 3. Liegt P auf der Geraden g?

**Beispiel a)** Gegeben sind $P(6\,|\,-4\,|\,5)$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Liegt P auf g?

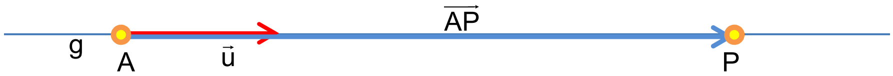
### 1. Die Punktprobenmethode

Man setzt den Ortsvektor $\vec{p}$ des Punktes P für $\vec{x}$ ein. Dies führt zu einem System aus drei Gleichungen für r. Erhält man eine eindeutige Lösung, liegt P auf g.

Lösung: $\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ bedeutet $\begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ d. h. $\left\{\begin{matrix} 12 = 3r \\ -8 = -2r \\ 8 = 2r \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} r = 4 \\ r = 4 \\ r = 4 \end{matrix}\right\}$

Da es ein eindeutiges Ergebnis gibt, nämlich r = 4, liegt P auf g.

### 2. Die Vektor-Vergleichs-Methode (wird dringend empfohlen!)




Überlegung: **Wenn** P auf g liegt, **dann** ist $\overrightarrow{AP}$ ein Vielfaches des Richtungsvektors $\vec{u}$ von g.

Wir benötigen die **Umkehrung**:

**Wenn** $\overrightarrow{AP}$ ein Vielfaches des Richtungsvektors $\vec{u}$ ist, **dann** liegt P auf g.

Rechnung dazu:

$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}$ wird verglichen mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$:

Ergebnis: Weil $\overrightarrow{AP} = 4 \cdot \vec{u}$ ist, liegt P auf g.

Anmerkung: Mehr dazu siehe Text 63100.

**Beispiel b)**

Gegeben sind $Q(-9\,|\,6\,|\,-1)$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Zeige, dass **Q nicht auf g** liegt.

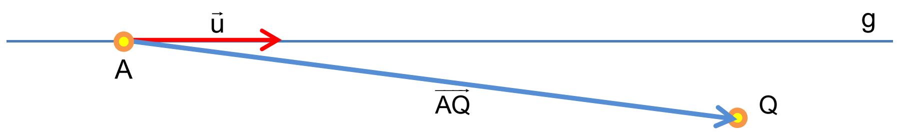
## 1. Die Punktprobenmethode

Der Ortsvektor $\vec{q} = \begin{pmatrix}-9\\6\\-1\end{pmatrix}$ von Q wird in g eingesetzt:

$$\begin{pmatrix}-9\\6\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix} \quad \text{bedeutet} \quad \begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix} \quad \text{d. h.} \quad \left\{\begin{matrix}3r = -3\\-2r = 2\\2r = 2\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}r = -1\\r = -1\\r = +1\end{matrix}\right\}$$

Es gibt keine (eindeutige) Lösung für r, also liegt Q <u>nicht</u> auf g.

## 2. Die Vektor-Vergleichs-Methode




**Wenn** Q <u>nicht</u> auf g liegt, **dann** hat $\overrightarrow{AQ}$ eine andere Richtung als der Richtungsvektor $\vec{u}$ von g, ist also kein Vielfaches von $\vec{u}$.

Wir benötigen von dieser Folgerung die **<u>Umkehrung</u>**:

**Wenn** $\overrightarrow{AQ}$ kein Vielfaches des Richtungsvektors $\vec{u}$ ist, **dann** liegt Q nicht auf g.

***Rechnung dazu:***

$\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix}-9\\6\\-1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$ wird verglichen mit $\vec{u} = \begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$:

Ergebnis: Weil $\overrightarrow{AQ} \neq k \cdot \vec{u}$, gilt: $Q \notin g$.

(Weil $\overrightarrow{AQ}$ kein Vielfaches von $\vec{u}$ ist, liegt Q nicht auf g.)

## 4. Liegen A, B und C auf einer Geraden – oder bilden sie ein Dreieck ?

**Beispiel:** a) Gegeben sind die Punkte $A(4|0|1),\ B(14|4|1),\ C(24|8|1)$

### 1. Umständliche Lösung: (über eine Geradengleichung)

Für eine Gleichung der Geraden g = (AB) verwende ich A als Aufpunkt und $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}10\\4\\0\end{pmatrix}$

als Richtungsvektor: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}10\\4\\0\end{pmatrix}$

Punktprobe mit $C(24|8|1)$: $\begin{pmatrix}24\\8\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}10\\4\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}24 = 4 + 10r\\ 8 = 4r\\ 1 = 1\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}20 = 10r\\ 2 = r\\ 1 = 1\end{Bmatrix}$

Das Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung r = 2.

Ergebnis: C liegt auf der Geraden g durch A und B.

### 2. Untersuchung durch die Methode „Vektorenvergleich“


Man vergleicht z. B. die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

Ansatz: $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ d. h. $\begin{pmatrix}20\\8\\0\end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix}10\\4\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow k = 2$

Ergebnis: Wegen $\overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$ liegen A, B und C auf einer Geraden.

**Beispiel:** b) Gegeben sind die Punkte $A(4|0|1),\ B(14|4|1),\ C(24|8|0)$

### 1. Umständliche Lösung: (über eine Geradengleichung)

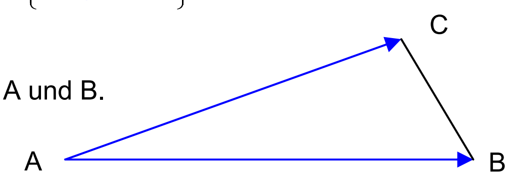
Gleichung der Geraden g = (AB): $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}10\\4\\0\end{pmatrix}$

Punktprobe mit $C(24|8|0)$: $\begin{pmatrix}24\\8\\\mathbf{0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}10\\4\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}24 = 4 + 10r\\ 8 = 4r\\ \mathbf{0 = 1}\end{Bmatrix}$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

Ergebnis: C liegt nicht auf der Geraden g durch A und B.

A, B und C bilden ein Dreieck.




### 2. Untersuchung durch die Methode „Vektorenvergleich“

Man vergleicht z. B. die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

Ansatz: $\overrightarrow{AC} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ d. h. $\begin{pmatrix}20\\8\\\mathbf{1}\end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix}10\\4\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}10k = 20\\ 4k = 8\\ \mathbf{0 = 1}\end{Bmatrix}$

Ergebnis: Es gibt keine Lösung: A, B und C bilden ein Dreieck.

Anmerkung: Ausführliches dazu im Text 63100

## 5. Ist ABCD ein Parallelogramm?

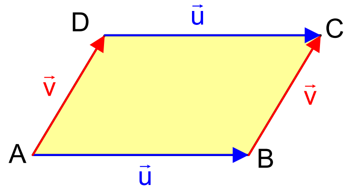
Für den **vektoriellen Nachweis** verwendet man in der Regel das Merkmal:

Wenn 2 Gegenseiten parallel und gleich lang sind, dann liegt ein Parallelogramm vor.

Man vergleicht also zwei Vektoren, von denen man vermutet, dass sie parallel sein könnten:

Also: Wenn $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}}$, dann ist ABCD ein Parallelogramm.

Oder: Wenn $\boxed{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}}$, dann ist ABCD ein Parallelogramm.




**Beispiel:** a) $A(0|1|0)$, $B(4|4|-1)$, $C(-1|3|2)$. $D(3|6|1)$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} = \vec{c} - \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Weil $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ist ABCD ein Parallelogramm.

**Hinweis:** **Denselben Vektorvergleich macht man, wenn man ein Dreieck zu einem Parallelogramm ergänzen soll.**

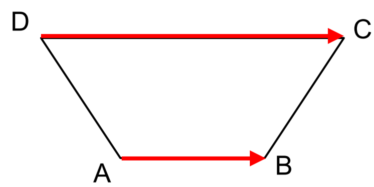
**Man beginnt mit dem Vergleich** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **und folgert** $\vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d}$.
**Daraus erhält man die Berechnungsformel für den Ortsvektor des gesuchten Punktes D:** $\boxed{\vec{d} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}}$

**Beispiel:** b) Untersuche, welche Art Viereck durch die folgenden Eckpunkte definiert wird:

$A(2|-1|-3)$, $B(0|0|-2)$, $C(-1|3|3)$ und $D(3|1|1)$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$




Man erkennt: $\overrightarrow{CD} = -2 \cdot \overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{DC} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$. Die Seiten AB und CD sind somit parallel.
Es liegt jedoch kein Parallelogramm vor, da die Seiten AB und BC nicht gleich lang sind.

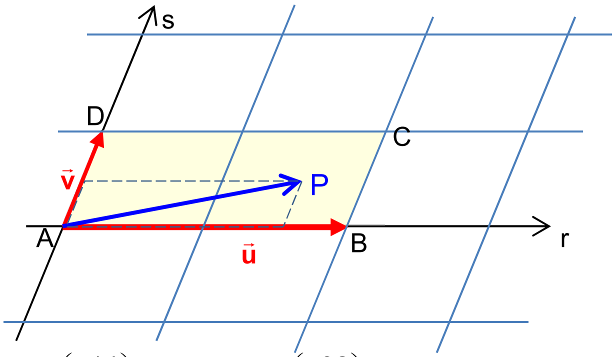
Ergebnis: Es liegt somit ein **Trapez** vor, bei dem die Grundseite halb so lang ist wie die gegenüberliegende Seite.

Anmerkung: Mehr dazu im Text 63006 und 63007

## 6. Liegt P im Parallelogramm?

Bestimme die Lage der Punkte $P(-9\,|\,3\,|\,8)$ und $Q(-27\,|\,3\,|\,19)$ **relativ zum Parallelogramm**.

Man muss herausfinden, mit welchen Werten r und s man den Vektor $\overrightarrow{AP}$ aus den „Basisvektoren" $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ kombinieren kann.




Dazu macht man diesen **Vektorenvergleich:**

$$\overrightarrow{AP} = r\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v} \qquad (1)$$

**Vorarbeit:** $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-18\\-9\\6\end{pmatrix}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-20\\5\\15\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix}-14\\-1\\8\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{AQ} = \begin{pmatrix}-32\\-1\\19\end{pmatrix}$

**Untersuchung von $P(-9\,|\,3\,|\,8)$:** (1) lautet dann:

$$\begin{pmatrix}-14\\-1\\8\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}-18\\-9\\6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-20\\5\\15\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}-18r-20s=-14\\-9r+5s=-1\\6r+15s=8\end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$$

Lösung: (3) - $3\cdot(2)$: $33r+0s=11 \Leftrightarrow r=\frac{1}{3}$

r in (2): $-9\cdot\frac{1}{3}+5s=-1 \Leftrightarrow 5s=-1+3=2 \Leftrightarrow s=\frac{2}{5}$

Probe in (1): $\underbrace{-18\cdot\tfrac{1}{3}}_{6}-\underbrace{20\cdot\tfrac{2}{5}}_{8}=-14$ Wahre Aussage!

Ergebnis: $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\cdot\vec{u}+\frac{2}{5}\cdot\vec{v}$. Da $r,s\in\,]\,0;1\,[$ liegt <u>P im Innern des Parallelogramms.</u>

**Untersuchung von $Q(-27\,|\,3\,|\,19)$** (1) lautet dann**:**

$$\begin{pmatrix}-32\\-1\\19\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}-18\\-9\\6\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-20\\5\\15\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}-18r-20s=-32\\-9r+5s=-1\\6r+15s=19\end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$$

Lösung: (3) - $3\cdot(2)$: $33r+0s=22 \Leftrightarrow r=\frac{2}{3}$

r in (2): $-9\cdot\frac{2}{3}+5s=-1 \Leftrightarrow 5s=-1+6=5 \Leftrightarrow s=1$

Probe in (1): $\underbrace{-18\cdot\tfrac{2}{3}}_{-12}-\underbrace{20\cdot1}_{20}=-31$ Wahre Aussage!

Ergebnis: $\overrightarrow{AQ}=\frac{2}{3}\cdot\vec{u}+\vec{v}$. Wegen s = 1 und 0 < r < 1 liegt P <u>auf der Strecke DC.</u>

Hinweis: Das Beispiel ist aus dem Text 63220 „Punkt und Parallelogramm/Dreieck"

## 7. Sind parallele Geraden sogar identisch?

Methode. Da parallele Geraden die gleiche Richtung haben, müssen ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sein.

**Beispiel a)** g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$. Sind g und h parallel?

Ansatz: Vergleich der Richtungsvektoren:

$$\vec{u} = k \cdot \vec{v} \quad \text{d. h.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}}_{=\vec{u}} = k \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}} \quad \text{d. h.} \quad \begin{Bmatrix} k = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2} \\ k = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2} \\ k = \frac{-3}{2} = -\frac{3}{2} \end{Bmatrix} \quad \text{Also gilt: } \vec{u} = -\tfrac{3}{2} \cdot \vec{v}, \text{ d. h. } g \parallel h.$$

**Wenn zwei Geraden parallel sind, dann können sie im Extremfall sogar identisch sein.**

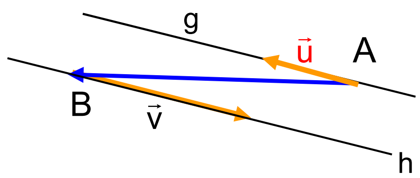
Methode: Parallele Geraden sind identisch, wenn sie gemeinsame Punkte haben.
Also prüft man, ob z. B. der Aufpunkt $A(1|-2|2)$ von g auch auf h liegt.

**1. Punktprobenmethode**: Ortvektor von A in h einsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} s = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ s = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \\ s = 0 \neq \frac{2}{3} \end{Bmatrix}$$

Weil es keine Lösung für s gibt, liegt A nicht auf h, d.h. $g \neq h$.

**2. Die Vektorenvergleichs-Methode (!!!)**




$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $B(-3|4|2)$ der Aufpunkt von h ist.

**Da der Vektor kein Vielfaches der beiden Richtungsvektoren von g oder h ist, liegt A nicht auf h und B nicht auf g. Also sind g und h zwar parallel aber nicht identisch.**

(Der Vektorenvergleich ist kürzer als die Punktprobe.)

## 8. Liegt P in einer gegebenen Ebene?

Wir lösen die **Aufgabe** „Liegt $P_1(12\,|\,-5\,|\,11)$ in der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}6\\-4\\5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}$ auf 2 Arten.

### Die erste Methode heißt Punktprobenmethode:

Überlegung: Die Gleichung $\boxed{\vec{x} = \vec{a} + r\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v}}$ dient der Berechnung von Punkten der Ebene:

Für r und s je eine Zahl einsetzen. $\Rightarrow$ Man erhält den Ortsvektor des zugehörenden Punktes

**Umgekehrte Richtung:** Man erhält r und s wenn P in E liegt. $\Leftarrow$ Den Ortsvektor eines Punktes einsetzen = **Punktprobenmethode**

**Beispiel a)** Liegt $P_1(12\,|\,-5\,|\,11)$ in der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}6\\-4\\5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}$?

Ortsvektor von $P_1$ einsetzen:

$$\begin{pmatrix}12\\-5\\11\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}6\\-4\\5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}$$

Das sind 3 Gleichungen für r und s:

$$\left\{\begin{matrix}12 = 0+6r+s\\ -5 = 3-4r+s\\ 11 = 1+5r-5s\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}6r+s=12\\ -4r+s=-8\\ 5r-5s=10\end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix}$$

PLAN: r und s aus (1) und (2) berechnen.
Dann muss man die Probe in (3) machen, diese entscheidet dann!

Elimination von s durch (1) – (2): $10r = 20 \Leftrightarrow r = 2$

r in (1) oder (2) ersetzen: $12 + s = 12 \Leftrightarrow s = 0$

Probe in (3): $10 - 5\cdot 0 = 10$

Weil die Probe eine wahre Aussage liefert, liegt $P_1$ in der Ebene E.

### Die zweite Methode ist ein Vektorenvergleich:

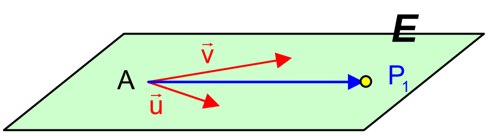



Abb. 8: P in E

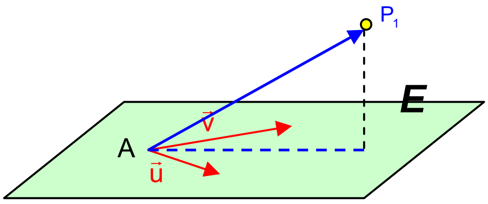



Abb. 9: P nicht in E.

Man vergleicht den Vektor $\overrightarrow{AP}$ mit den beiden Richtungsvektoren der Ebene:

***Folgende Fakten sind dabei sehr wichtig (siehe Abbildungen):***

**1. Fall:** **Liegt P in E**, dann sind die drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AP}$ komplanar.

Das heißt, dass sie linear abhängig sind.

Das heißt, dass man $\overrightarrow{AP}$ **als Linearkombination aus $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darstellen** kann.

Und dies ist genau dann der Fall, wenn die **Determinante** $D = \left| \vec{u} \ \ \vec{v} \ \ \overrightarrow{AP} \right| = 0$ ist. *)

**2. Fall:** **Liegt P nicht in E**, dann sind die drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AP}$ nicht komplanar.

Das heißt, dass sie linear unabhängig sind.

Das heißt, dass man $\overrightarrow{AP}$ **NICHT als Linearkombination aus $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darstellen** kann.

Und dies ist genau dann der Fall, wenn die **Determinante** $D = \left| \vec{u} \ \ \vec{v} \ \ \overrightarrow{AP} \right| \neq 0$ ist. *)

Dazu die Rechnung dieses Beispiels

Liegt $P_1(12\,|\,-5\,|\,11)$ in der Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ ?

Vergleich von $\overrightarrow{AP_1} = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix}$ mit den Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$:

**1. Methode mit einer Linearkombination:**

P liegt genau dann in E, wenn man $\overrightarrow{AP_1}$ als Linearkombination aus $\vec{u}$ und $\vec{v}$ darstellen kann.

Ansatz: $\boxed{\overrightarrow{AP_1} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} \ \Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 10 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \ \Leftrightarrow\ \left\{ \begin{array}{l} 6x + y = 12 \\ -4x + y = -8 \\ 5x - 5y = 10 \end{array} \right\} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}}$

$(1)-(2)$: $10x = 20 \ \Leftrightarrow\ x = 2$.

Eingesetzt in (1) ergibt: $y = 0$.

Probe in (3): $10 - 0 = 10$.

Dies ist eine wahre Aussage.

Es gilt also $\overrightarrow{AP_1} = 2 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v}$ und damit **liegt $P_1$ in E.**

**2. Methode mit einer Determinante:**

Überprüfung der linearen Unabhängigkeit dieser drei Vektoren:

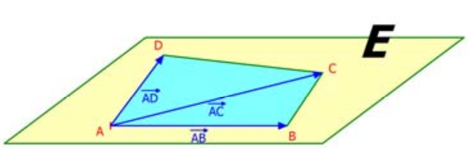
$$D = \left| \vec{u}\ \vec{v}\ \overrightarrow{AP_1} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 6 & 1 & 12 \\ -4 & 1 & -8 \\ 5 & -5 & 10 \end{array} \right| \begin{array}{cc} 6 & 1 \\ -4 & 1 \\ 5 & -5 \end{array} = \cancel{60} - \cancel{40} + \cancel{240} - \cancel{60} - \cancel{240} + \cancel{40} = 0$$

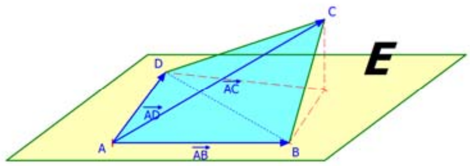
Also sind die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AP_1}$ linear abhängig, **also liegt $P_1$ in E.**

Anmerkung: Ausführlich wird dies im Text 63200 besprochen.

## 9. Liegen vier Punkte in einer Ebene?

**Beispiel:** Ist $A(-8|-3|6)$, $B(4|5|-10)$, $C(10|6|-3)$, $D(-4|24|-1)$ ein ebenes Viereck?




Die linke Abbildung zeigt ein in der Ebene E liegendes Viereck ABCD.

*Das Viereck ABCD ist eben:* *Also sind die drei Vektoren* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ *komplanar.*

*Umgekehrt gilt:* *Weil diese Vektoren komplanar sind, ist das Viereck ABCD eben.*

Die rechte Abbildung zeigt ein nicht-ebenes Viereck ABCD.
Das Teildreieck ABD liegt in E, die Ecke C aber nicht. (Sie wurde „nach oben gezogen".)

*Das Viereck ABCD ist nicht eben:* *Die Vektoren* $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ *sind nicht komplanar.*

*Umgekehrt: Weil diese Vektoren linear unabhängig sind, ist das Viereck ABCD nicht eben.*

Wir benötigen für unsere Untersuchung die Umkehrung.

**Also vergleichen wir diese drei Vektoren innerhalb einer Determinante:**

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 12 & 18 & 4 \\ 8 & 9 & 27 \\ -16 & -9 & -7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 27 \\ -4 & -1 & -7 \end{vmatrix} \begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ -4 & -1 \end{array}$$

Ich habe aus der 1. Spalte die 4 ausgeklammert und aus der 2. Spalte die 9.
(Bei der Linearen Abhängigkeit kommt es nicht auf die Länge der Vektoren an!)

$$= 36 \cdot \left[-21 - 216 - 8 - \left(-16 - 91 - 28\right)\right] = 36 \cdot [-245 + 135] \neq 0$$

Weil diese Determinante ungleich 0 ist, sind diese drei Vektoren linear unabhängig (nicht komplanar).

Die Pfeile $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ liegen also nicht alle drei in der Ebene E:

Das Viereck ist nicht eben!